

## UMA FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA A SOLUÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E RADIAÇÃO EM MEIOS COM ÍNDICE DE REFRAÇÃO NÃO UNITÁRIO

**Agnaldo Luís Guolo**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUCPR – Rua Imaculada Conceição, 1155 – Prado Velho,  
Curitiba –PR - Brasil  
agnaldo.luiz@csn.com.br

**Luís Mauro Moura**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUCPR – Rua Imaculada Conceição, 1155 – Prado Velho,  
Curitiba –PR - Brasil  
Luis.moura@pucpr.br

***Resumo.** Apresenta-se neste trabalho uma formulação para o estudo da transferência de calor através de meios semitransparentes que apresentam emissão, absorção e espalhamento (vidro e aerogel). Foram considerados os processos de condução e radiação acoplados para uma geometria unidimensional (meio plano) com a incidência de um feixe de radiação colimado perpendicular ao material e em regime permanente. A equação da Transferência Radiativa (ETR) é resolvida numericamente pelo Método das Ordenadas Discretas sendo a discretização espacial realizada através da técnica de Volume de Controle. A equação da condução é resolvida pelo algoritmo de Thomas (TDMA), que resolve o problema numa linha a partir das temperaturas das faces. O programa desenvolvido permite a análise da influência de cada processo (condução/radiação) na transferência total de calor através dos materiais. Ainda é analisado o efeito da variação do índice de refração para os dois materiais estudados e o erro decorrente da variação do número de direções da quadratura utilizado.*

*Palavras chave:* Transferência de calor por condução e radiação, aerogel, vidro, eficiência energética.

### 1. Introdução

A transferência de calor por condução e/ou convecção combinada com a radiação através de um meio participante que absorve, emite e espalha a radiação térmica é um fenômeno que aparece em muitas aplicações práticas e de engenharia; alguns exemplos são as janelas de edificações, fornos, automóveis e aeronaves, onde são utilizados materiais semitransparentes como o vidro e mais recentemente o aerogel.

O aerogel combina transparência com alta resistividade térmica, o que o torna um material atrativo para várias aplicações. O processo de transferência radiativa em aerogéis, sobretudo os que possuem uma matriz com índice de refração diferente da unidade, é complexo. A radiação incidente na interface é uma parte refletida e a restante refratada para o interior do material. Em seguida, a parcela de energia que atravessa este material sofre espalhamento em função da diferença de índices de refração entre as partículas dispersas e a matriz, e então, finalmente noutra interface uma parcela do feixe é novamente refletida e refratada, e assim por diante (Moura, 2002).

O modelo de simulação é baseado no Método das Ordenadas Discretas na condição de simetria do campo radiativo. Simulações numéricas permitem compreender o processo de transferência de calor por radiação e estudar os parâmetros que influenciam este processo.

Glass *et al.* (1987) analisaram o acoplamento da condução e da radiação num meio semitransparente cinzento, emissor e absorvedor tendo o fluxo de calor nas faces externas como condições de contorno. Ressalta-se a análise da influência do parâmetro de relação entre condução e radiação ( $N$ ), da espessura ótica e das emissividades das faces (com revestimentos opacos) e do meio no aumento da temperatura das faces.

Siegel e Spuckler (1992) estudaram o efeito do índice de refração de um meio semitransparente na distribuição de temperatura e no fluxo de calor radiativo; o meio considerado é composto de apenas uma camada, sendo que absorve, emite e espalha a radiação isotropicamente. Para o caso de equilíbrio radiativo, apresenta-se um modelamento que permite obter a distribuição de temperatura e o fluxo de calor radiativo para qualquer índice de refração a partir dos resultados para o índice de refração unitário.

Siegel e Spuckler (1993) estudaram um meio semitransparente com várias subcamadas cada uma com seu índice de refração e espessura ótica próprios. As temperaturas e o fluxo de calor resultantes são dados para se mostrar o efeito das variações do índice de refração e espessura ótica através das subcamadas.

Heinemann *et al.* (1996) analisaram a transferência de calor por condução e radiação acoplados em sílica aerogéis com baixa densidade. Foi feito um estudo teórico e experimental para várias espessuras óticas e relações de

transferência de calor condução/radiação; sendo materiais com alta porosidade, foi variada a pressão no interior dos mesmos, considerando-se a variação das propriedades físicas resultantes.

Moura *et al.* (1998) analisaram diferentes tipos de funções de interpolação utilizadas no cálculo da variação das intensidades radiativas no volume de controle no método das ordenadas discretas aplicado à Equação de Transferência Radiativa (ETR).

Moura *et al.* (1997) apresentaram uma análise numérica de diferentes conjuntos de quadraturas num método de ordenadas discretas para resolver a Equação de Transferência Radiativa (ETR). Duas quadraturas diferentes são derivadas das quadraturas clássicas de Gauss e Radau.

Nicolau (1994) estudou a transferência de calor por condução e radiação em um meio semitransparente plano. O meio apresenta emissão, absorção e espalhamento isotrópico, entre superfícies negras. A discretização da ETR foi feita através de diferenças finitas. Foram obtidas as distribuições de temperatura, fluxos de calor e intensidades radiativas em função de vários parâmetros.

Xia *et al.* (2001) analisaram o campo de temperatura num meio semitransparente absorvedor e emissor, estando as faces limitadas por duas superfícies semitransparentes especulares, com equilíbrio radiativo. Foi considerado o índice de refração variando no espaço e também noutro caso variando com a temperatura. Os resultados mostraram que o índice de refração tem grande influência sobre o perfil de temperatura.

Neste trabalho apresenta-se um modelo para a transferência de calor por radiação e condução acoplados, através de um meio semitransparente que apresenta espalhamento constituído de uma matriz sólida com índice de refração não unitário (aerogel) e também através de um meio semitransparente não difusor (vidro).

## 2. Equação da Transferência Radiativa (ETR)

O estudo da transferência de calor por radiação em meios participantes é realizado através da solução da Equação de Transferência Radiativa (ETR). Nesta análise considera-se um meio homogêneo, emissor, absorvedor, com espalhamento e em equilíbrio termodinâmico. As fronteiras possuem componentes de reflexão especular e de espalhamento, além de efetuarem refração a um feixe incidente não normal a superfície. Neste estudo a ETR é considerada para uma geometria com simetria azimutal.

Através da Equação da Transferência Radiativa (ETR) podem-se calcular as trocas de energia entre interfaces (paredes, fronteiras) considerando um meio participante (Meio Semitransparente – MST). A ETR descreve a variação da intensidade radiativa  $I$  (num ângulo sólido  $d\Omega$ , função da coordenada ótica  $\tau$ ). Esta equação foi obtida para um meio pseudocontínuo em relação à transferência radiativa existente num material disperso real.

Para a obtenção da ETR efetua-se um balanço dos mecanismos físicos de interação radiação/meio por um feixe de radiação se propagando através de um meio que absorve, emite, ou espalha, obtém-se a expressão da ETR monocromática em uma geometria unidimensional cartesiana:

$$\frac{1}{\beta} \mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) = (1 - \omega) I_b(T) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') p(\mu', \mu) d\mu' \quad (1)$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de extinção,  $\tau$  é a coordenada ótica na direção do eixo  $x$ , sendo que  $\tau = \beta x$  para um coeficiente de extinção invariante com a posição,  $\omega$  é o albedo  $I_b(T)$  é a intensidade de radiação emitida pelo corpo negro à temperatura do meio,  $p$  é a função de fase e o termo integral: representa o ganho por difusão para cada semi-hemisfério.

### 2.1. Solução da equação da transferência radiativa: método das ordenadas discretas

Neste trabalho, a ETR será resolvida numericamente pelo Método das Ordenadas Discretas (MOD) aplicado a um volume de controle. Esta técnica de solução da ETR é descrita detalhadamente em Moura *et al.* (1997 e 1998).

A Eq. (1) é do tipo integro-diferencial. Sua solução pelo Método das Ordenadas Discretas é constituída de duas etapas: *i*) uma discretização angular, sendo o termo integral substituído por uma soma das intensidades radiativas. Desta maneira, obtém-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem; *ii*) uma discretização espacial, considerando um volume de controle, para a solução das equações diferenciais ordinárias.

Considerando-se como condição de contorno faces opacas, Fig. 1, espalhadoras em emissão e reflexão, tem-se as intensidades radiativas dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 0 \rightarrow I(0, \mu) = \varepsilon_1 I_b(T_1) + 2(1 - \varepsilon_1) \int_0^1 I(0, -\mu') \mu' d\mu' + \tau' I_c \quad \mu_0 > \mu > 0 \\ \tau = 0 \rightarrow I(0, \mu) = \varepsilon_1 I_b(T_1) + 2(1 - \varepsilon_1) \int_0^1 I(0, -\mu') \mu' d\mu' \quad \mu > \mu_0 \\ \tau = \tau_0 \rightarrow I(\tau_0, \mu) = \varepsilon_2 I_b(T_2) + 2(1 - \varepsilon_2) \int_0^1 I(\tau_0, \mu') \mu' d\mu' \quad \mu < 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

onde:

- |   |  |
|---|--|
| $\epsilon_1$ : emissividade da parede 1                   | $\mu_o$ : co-seno do ângulo de divergência do feixe colimado |
| $\epsilon_2$ : emissividade da parede 2                   | $\tau'$ : transmissividade da face                           |
| $\tau_0$ : espessura ótica da face 2                      | $T_1$ e $T_2$ : temperaturas das faces 1 e 2 respectivamente |
| $I_c$ : intensidade radiativa do feixe colimado incidente |  |

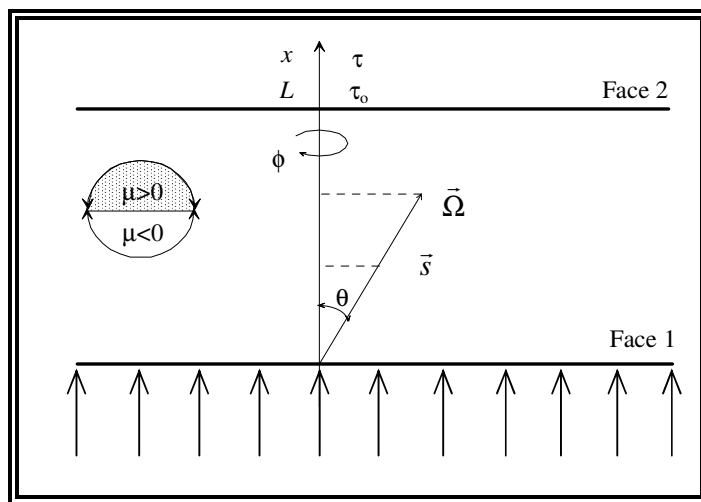


Figura 1. Sistema de coordenadas unidimensional (meio plano semitransparente) (Moura, 2002).

Considerando-se uma função de interpolação linear para o cálculo da variação da intensidade radiativa no interior do volume, obtém-se então, a partir da Eq. (1), uma equação discretizada na seguinte forma:

$$I_{i+1/2,j} = \frac{S_{i+1/2,j} \alpha_j / 2 + I_{i,j}}{1 + \alpha_j / 2} \quad (3)$$

sendo

$$\alpha_j = \frac{\Delta \tau_{i+1/2}}{\mu_j} \quad (4)$$

$$S_{i+1/2,j} = (1 - \omega) I_b(T_{i+1/2}) + \frac{\omega}{2\beta} \left[ \sum_{n=1}^{N_d/2} w_n (p_{nj} I_{i+1/2,n} + p_{-nj} I_{i+1/2,-n}) \right] \quad (5)$$

onde o índice  $i+1/2$  representa o centro do volume situado entre as faces de índice  $i$  e  $i+1$ . Na Eq. (3)  $I_{i,j}$  é um valor conhecido e calcula-se  $I_{i+1/2,j}$  através de várias iterações, atualizando o termo fonte  $S_{i+1/2,j}$ . As ponderações são representadas por  $w_n$  e são associadas as direções  $\mu_n$ ;  $\Delta \tau$  representa a variação da variável ótica,  $p$  representa a função de fase e  $N_d$  representa o número de direções da quadratura.

As condições de contorno são obtidas a partir da Eq. (2):

$$\begin{cases} I(0, \mu_j) = \epsilon_1 I_b(T_1) - 2(1 - \epsilon_1) \sum_{\mu_n < 0} w_n \mu_n I(0, \mu_n) & \mu_j > 0 \\ I(\tau_o, \mu_j) = \epsilon_2 I_b(T_2) + 2(1 - \epsilon_2) \sum_{\mu_n > 0} w_n \mu_n I(\tau_o, \mu_n) & \mu_j < 0 \end{cases} \quad (6)$$

O fluxo de calor ( $q_R$ ), a radiação incidente ( $G$ ) e o divergente do fluxo radiativo ( $\dot{q}$ ) são definidos como:

$$q_{R_i} = 2\pi \sum_{n=1}^{N_d/2} w_n \mu_n (I_{i,n} - I_{i,-n}) \quad (7)$$

$$G_i = 2\pi \sum_{n=1}^{N_d/2} w_n (I_{i,n} + I_{i,-n}) \quad (8)$$

$$\dot{q}_i = \text{div} \left( \vec{q}_R \right) = \sigma_a \left[ 4n^2 I_b - 2\pi \sum_{n=1}^{N_d/2} w_n (I_{i,n} + I_{i,-n}) \right] \quad (9)$$

## 2.2. Condução e radiação combinados

A equação da energia para os processos de radiação e condução simultâneos em um meio participante pode ser escrita da seguinte forma:

$$m c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot (k \bar{\nabla} T) + Q''' - \bar{\nabla} \cdot \bar{q}_R \quad (10)$$

onde:

- m : massa específica
- c<sub>p</sub> : calor específico
- k : condutividade térmica
- Q''' : geração interna de calor
- q<sub>R</sub> : fluxo radiativo

Para o caso de um meio unidimensional, plano e com regime permanente e sem geração interna de calor, a Eq. (10) fica reduzida a:

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} - q_R \right) = 0 \quad (11)$$

As condições de contorno correspondem às temperaturas nas duas faces:

$$x = 0: T(0) = T_1 \quad (12)$$

$$x = L: T(L) = T_2 \quad (13)$$

O divergente do fluxo radiativo é obtido pelo Método das Ordenadas Discretas:

$$\frac{dq_R}{dx} = \int_0^\infty \sigma_{av} (4\pi I_{bv} - G_v) dv \quad (14)$$

onde

$$G_v = \int_{4\pi} I_v d\Omega \quad (15)$$

Introduzindo-se as variáveis e parâmetros adimensionais (Modest, 1993):

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \theta_T = \frac{T}{T_1}, \quad \Psi_R = \frac{q_R}{n^2 \sigma T_1^4}, \quad g = \frac{G}{4n^2 \sigma T_1^4}; \quad (16)$$

$$\tau_0 = \beta L, \quad \theta_L = \frac{T_2}{T_1}, \quad N = \frac{k\beta}{4\sigma T_1^3},$$

Sendo  $\tau_0$  a espessura ótica do meio, o N o parâmetro de relação entre condução e radiação e L a espessura do meio. Aplicando as variáveis reduz-se as Eqs. 11 a 14 a:

$$\frac{d^2 \theta_T}{d\tau^2} = \frac{1}{4N} \frac{d\Psi_R}{d\tau} \quad (17)$$

$$\frac{d\Psi_R}{d\tau} = 4(\theta_T^4 - g) \quad (18)$$

$$\theta_T(0) = 1; \quad \theta_T(\tau_0) = \theta_L \quad (19)$$

### 2.3. Discretização da equação da difusão

A equação da difusão será também resolvida numericamente pelo Método dos Volumes Finitos. Considerando-se um problema unidimensional em regime permanente, a equação da difusão pode ser representada pela seguinte expressão:

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0 \quad (20)$$

Sendo  $\dot{q}$  o divergente do fluxo radiativo e  $k$  a condutividade térmica do meio.

A discretização da Eq. (20) é feita dividindo-se o meio em volumes justapostos na direção da espessura (eixo  $x$ ). Para cada volume de controle, Fig. 2 são considerados os volumes anterior (W) e posterior (E) utilizando-se sempre como referência os pontos centrais.

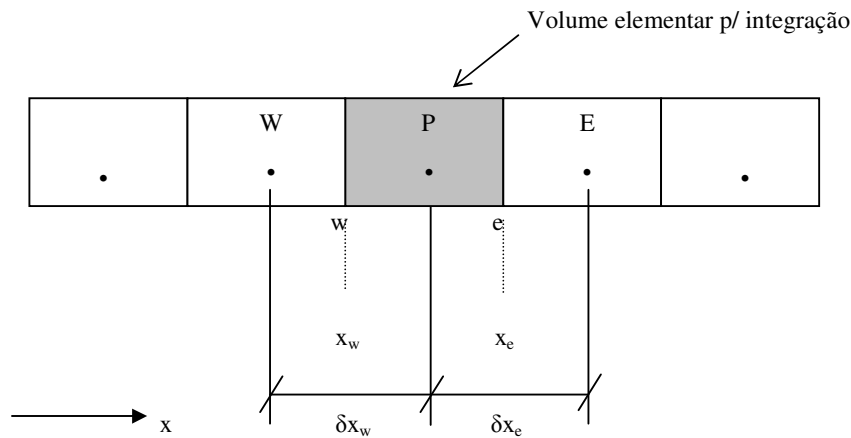


Figura 2. Discretização com volumes finitos.

Sendo  $\Delta x = x_e - x_w$  e integrando o volume de controle entre os limites  $x_w$  e  $x_e$  tem-se:

$$\int_{x_w}^{x_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} \right] dx = 0 \quad (21)$$

$$\left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w + \dot{q} \Delta x = 0 \quad (22)$$

Utilizando-se uma aproximação de 1ª ordem para as derivadas da temperatura e substituindo nas derivadas da Eq. (22) resulta:

$$k_e \frac{(T_e - T_p)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_p - T_w)}{\delta x_w} + \dot{q} \Delta x = 0 \quad (23)$$

Escrevendo a Eq. (23) na forma

$$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w + b \quad (24)$$

Obtém-se os coeficientes:

$$a_p = \frac{k_e}{\delta x_e} + \frac{k_w}{\delta x_w} \quad a_e = \frac{k_e}{\delta x_e} \quad a_w = \frac{k_w}{\delta x_w} \quad b = \dot{q} \Delta x \quad (25)$$

A Eq. (25) é resolvida pelo algoritmo de Thomas ou método TDMA; é um método linha a linha que, resolve cada linha sendo conhecidas as temperaturas das duas linhas vizinhas. No caso de um problema unidimensional este método é direto, sendo que para problemas bi e tridimensionais é iterativo sendo processado linha a linha e coluna a coluna.

### 3. Metodologia

Neste trabalho a simulação numérica foi adaptada a partir do algoritmo desenvolvido por Moura (1998) para a identificação de propriedades radiativas. Nesta análise utilizou-se somente a parte dita “direta” deste código, sendo desenvolvido neste trabalho o código para a condução de calor em regime permanente acoplado à ETR.

Estudaram-se dois tipos de materiais: o vidro e o aerogel, levando-se em conta as premissas enumeradas abaixo para análise do problema:

- a) Para o aerogel consideraram-se dois casos em relação às direções do espalhamento (função de fase): comportamento isotrópico conforme Siegel e Spuckler (1994a e 1994b) e comportamento anisotrópico (Modelo de Henyey-Greenstein modificado, Moura, 1998);
- b) O feixe incidente foi considerado do tipo colimado incidindo perpendicularmente à face;
- c) Foi utilizada a quadratura de Radau modificada para determinar a distribuição das intensidades radiativas no caso do vidro e a quadratura de Nicolau para o caso do aerogel (Moura, 1998);
- d) A malha utilizada para divisão da espessura do meio foi a malha regular onde todos os volumes possuem a mesma dimensão  $\Delta x$ ; existe a possibilidade de utilização de outras malhas não regulares que propiciam um refinamento maior em uma determinada região, como por exemplo a malha de Tchebycheff que refina as regiões próximas das extremidades;
- e) A variação da intensidade do feixe ao longo do volume foi considerada linear;
- f) Os índices de refração foram considerados constantes com a temperatura, tendo sido adotados valores médios, o mesmo acontecendo com os coeficientes de condutividade térmica;

Estudou-se dois materiais com propriedades físicas distintas: vidro comercial flutado e aerogel com massa específica  $m=5 \text{ kg/m}^3$  (Heinemann *et al.*, 1996). Todas as propriedades da Tab. 1 referem-se a uma temperatura média de 300K. As temperaturas das faces para cada caso de simulação foram calculadas a partir dos valores de  $N$  e  $\tau$ , mantidos fixas as demais grandezas ( $\omega$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $n$ ).

Tabela 1. Propriedades físicas dos materiais considerados nas simulações.

Materiais	Albedo ( $\omega$ )	Coef. extinção ( $\beta$ ) [ $\text{m}^{-1}$ ]	Condutividade térmica ( $k$ ) [ $\text{W/mK}$ ]	Índice de refração ( $n$ )
Vidro flutado	0	50 [1]	1,5 [2]	2 [3]
Aerogel [4]	0,90	10	1,5	2

[1] Nicolau e Maluf – 2001 [2] Brewster, 2002 [3] McCluney - 1994 [4] Heinemann *et al.* - 1996

O critério de convergência adotado foi o de uma variação menor que  $10^{-10}$  K para duas iterações sucessivas para o perfil de temperatura ( $tep$ ); para se evitar a divergência foi inserida no programa uma relaxação para o divergente do fluxo radiativo ( $\dot{q}$ ), onde apenas uma parcela da iteração anterior era incorporada à iteração atual.

### 4. Resultados obtidos e discussão

#### 4.1 Simulação da Condução e Radiação Acoplados para o Caso de um Meio sem Espalhamento (Vidro) com Feixe Incidente e $n>1$

A Fig. 3 apresenta a distribuição de temperatura para várias espessuras óticas e albedo nulo. Observa-se que para todas as curvas existe uma variação maior da curvatura próximo da face de incidência da radiação, ficando mais suave ao longo da espessura para a direita. No caso de  $\tau_0=1$  esta variação da curvatura é mais acentuada, onde a influência da radiação é maior já que o material não é óticamente delgado nem tão pouco espesso. O mesmo comportamento da curva para  $\tau_0=1$  foi encontrado por Siegel e Spuckler (1994a) num estudo semelhante para feixe de radiação incidente nas duas faces.

Na Fig. 4 tem-se as curvas de fluxo total ao longo da espessura. Analogamente aos perfis de temperatura da Fig. 3 verifica-se que no lado da incidência da radiação a variação das curvaturas é maior ficando constante a partir da posição  $x/L=0,07$  aproximadamente, sendo que a maior variação de curvatura foi verificada para  $\tau_0=10$ ; Após este ponto existe pouca diferença nos valores do fluxo total entre as curvas.

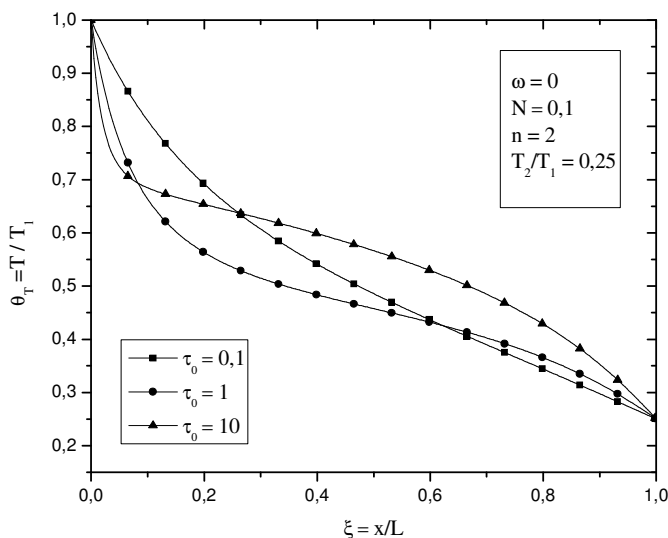


Figura 3. Distribuição de temperatura adimensional para condução e radiação acoplados para várias espessuras óticas ( $\tau_0$ ), com  $\omega=0$ ,  $N=0,1$ ,  $n=2$ , feixe de radiação incidente normal e relação de temperatura das faces  $T_2/T_1=0,25$ .

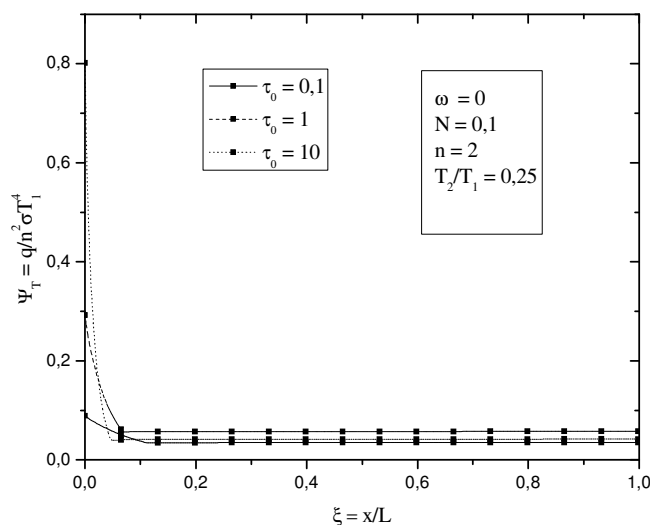


Figura 4. Distribuição do fluxo total adimensional para condução e radiação acoplados para várias espessuras óticas ( $\tau_0$ ), com  $\omega=0$ ,  $N=0,1$ ,  $n=2$ , feixe de radiação incidente normal e relação de temperatura das faces  $T_2/T_1=0,25$ .

#### 4.2 Simulação da Condução e Radiação Acoplados para o Caso de um Meio com Espalhamento (Aerogel) com Feixe Incidente e $n>1$ ( $k=1,5$ )

A Fig. 5 apresenta as curvas de temperatura para vários casos de espessura ótica e albedo de 0,9. Comparando-se com as curvas da Fig.3 onde o espalhamento é nulo, verifica-se que o espalhamento causa uma diminuição da variação da curvatura. No caso de  $\tau_0=0,1$  a curva é praticamente linear.

A Fig.6 mostra as curvas de fluxo total para o caso de albedo não nulo ( $\omega=0,9$ ). No lado da face de incidência as curvas apresentam maior variação de curvatura em relação às curvas da Fig. 4 para albedo nulo, sendo que os fluxos ficam constantes a partir da posição  $x/L=0,13$  aproximadamente. A partir deste ponto os valores de fluxo são também ligeiramente inferiores em relação àqueles com albedo nulo.

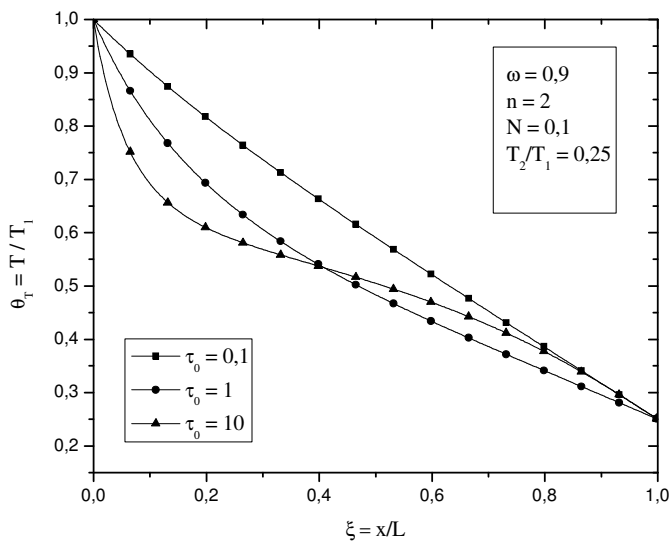


Figura 5. Distribuição de temperatura adimensional para condução e radiação acoplados para várias espessuras óticas ( $\tau_0$ ), com  $\omega=0,9$ ,  $N=0,1$ ,  $n=2$ , feixe de radiação incidente normal e relação de temperatura das faces  $T_2/T_1=0,25$  e espalhamento isotrópico.

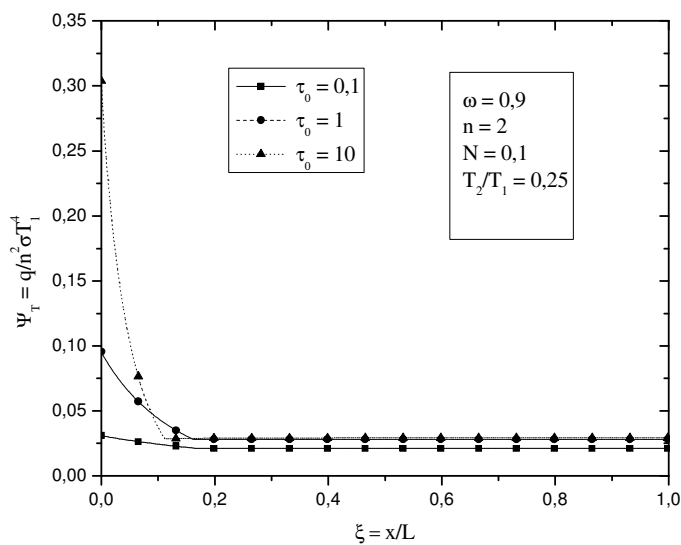


Figura 6. Distribuição do fluxo total adimensional para condução e radiação acoplados para várias espessuras óticas ( $\tau_0$ ), com  $\omega=0,9$ ,  $N=0,1$ ,  $n=2$ , feixe de radiação incidente normal e relação de temperatura das faces  $T_2/T_1=0,25$  e espalhamento isotrópico.

A Fig. 8 apresenta os perfis de temperatura para o caso de espalhamento anisotrópico. Utilizou-se o modelo de Henyey-Greenstein Modificado (Nicolau *et al.*, 1994), Fig. 7, para a função de fase (p):

$$p(\mu', \mu) = f_1 f_2 p_{HG,g_1}(\mu', \mu) + (1 - f_1) f_2 p_{HG,g_2}(\mu', \mu) + (1 - f_2) \quad (36)$$

Sendo  $p_{HG}$  o modelo de Henyey-Greenstein para a função de fase e os parâmetros  $f_1 = 0,90$ ,  $f_2 = 0,95$ ,  $g_1 = 0,84$  e  $g_2 = 0,60$ .



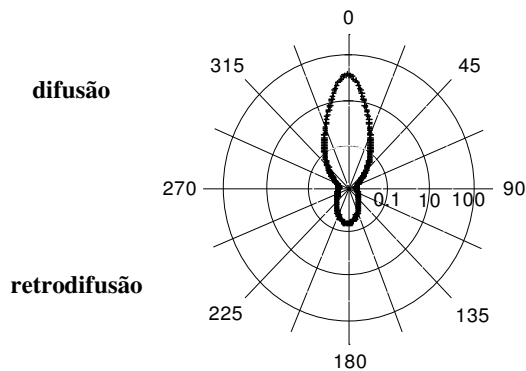


Figura 7. Função de fase ( $f1=0.9$ ,  $g1=0.84$ ,  $f2=0.95$ ,  $g2=-0.6$ ), Moura (1998).

Comparando-se os resultados obtidos com a Fig. 5 onde considerou-se o espalhamento como isotrópico, verifica-se uma diferença da ordem de 10% para as espessuras óticas  $\tau_0 = 1$  e  $\tau_0 = 10$  e da ordem de 4% para  $\tau_0 = 0,1$ .

Analogamente, a Fig. 9 apresenta as curvas do fluxo total adimensional considerando-se o espalhamento como anisotrópico. Comparando-se com os resultados obtidos na Fig. 6 para o caso de espalhamento isotrópico resulta uma diferença da ordem de 41,5% (parte constante da curva) para a espessura ótica  $\tau_0 = 0,1$ , 27% para  $\tau_0 = 1$  e de cerca de 4,7% para a espessura ótica  $\tau_0 = 10$ .

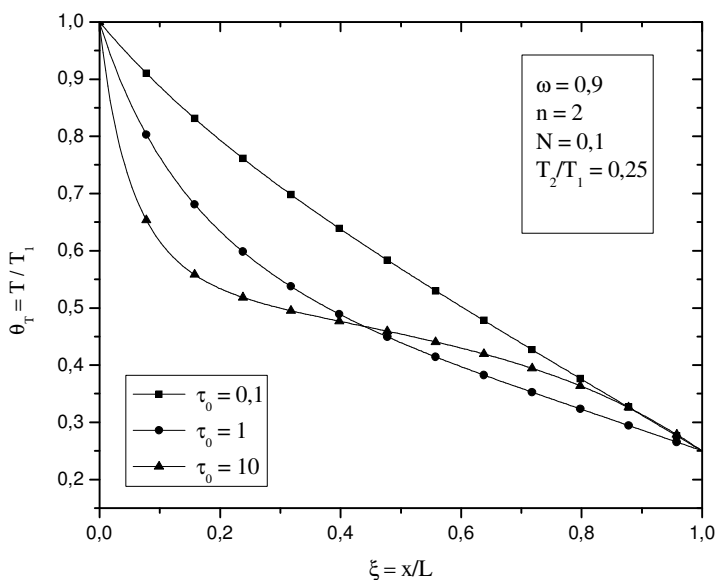


Figura 8. Distribuição de temperatura adimensional para condução e radiação acopladas para várias espessuras óticas ( $\tau_0$ ), com  $\omega=0,9$ ,  $N=0,1$ ,  $n=2$ , feixe de radiação incidente normal, relação de temperatura das faces  $T_2/T_1=0,25$  e espalhamento anisotrópico.

Na Fig. 10 mostra-se a variação do fluxo total na posição central do meio em função do índice de refração para os casos de albedo nulo e não nulo ( $\omega=0,9$ ); o parâmetro de acoplamento utilizado neste caso é dado por  $N=k/\sigma T_1^3 L$ . Para os dois casos à medida que o índice de refração aumenta, o fluxo diminui com comportamento bastante semelhante, mostrando que o espalhamento neste caso tem pouca influência sobre o comportamento da curva, apenas fazendo diminuir o patamar dos valores. Estes resultados são semelhantes aos obtidos por Siegel e Spuckler (1993) onde se estudou uma amostra com várias subcamadas, cada uma delas com um índice de refração próprio.

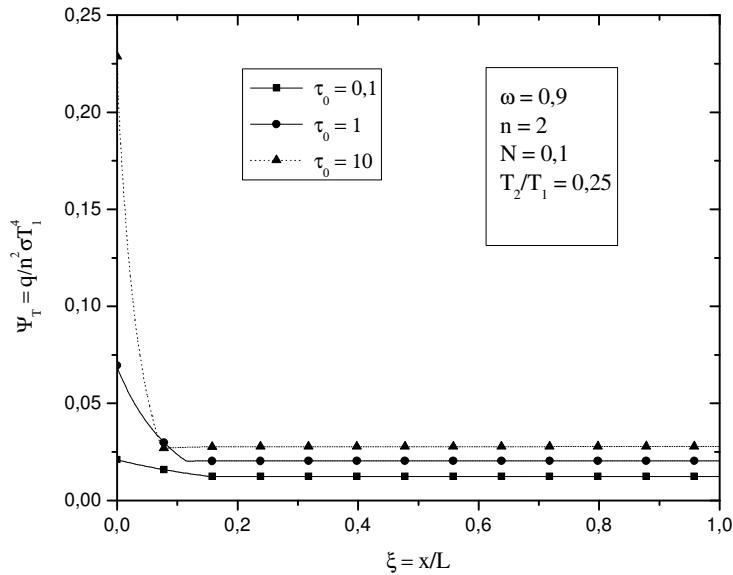


Figura 9. Distribuição do fluxo total adimensional para condução e radiação acoplados para várias espessuras ópticas ( $\tau_0$ ), com  $\omega=0,9$ ,  $N=0,1$ ,  $n=2$ , feixe de radiação incidente normal, relação de temperatura das faces  $T_2/T_1=0,25$  e espalhamento anisotrópico

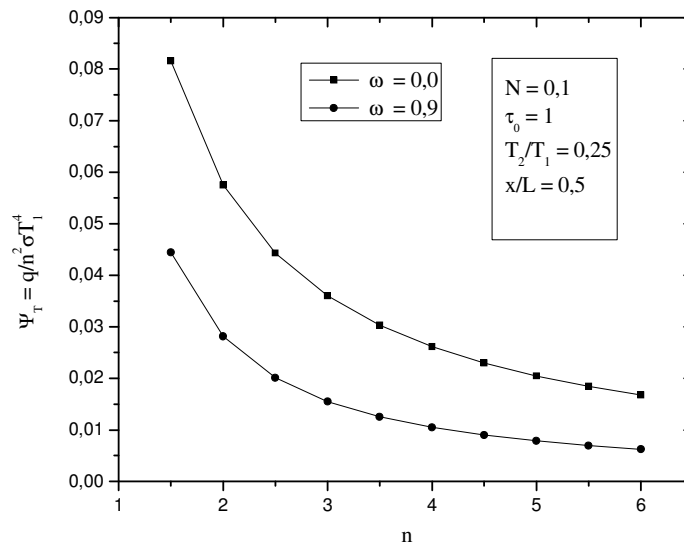


Figura 10. Distribuição do fluxo total adimensional para condução e radiação acoplados em função do índice de refração ( $n$ ) para  $\omega=0$  e  $\omega=0,9$ ,  $N=0,1$ , feixe de radiação incidente normal e relação de temperatura das faces  $T_2/T_1=0,25$ .

A Fig. 11 apresenta o erro percentual do fluxo total ao variar-se o número de direções da quadratura para os casos de material sem e com espalhamento. Como referência foi utilizado o cálculo do fluxo com 96 direções já que acima desta quantidade praticamente não há variação dos valores. Verifica-se a mesma tendência para ambas as curvas sendo que para um número de direções inferior a 10 o erro torna-se significativo. A quadratura utilizada neste caso foi a de Nicolau (Moura, 1998).

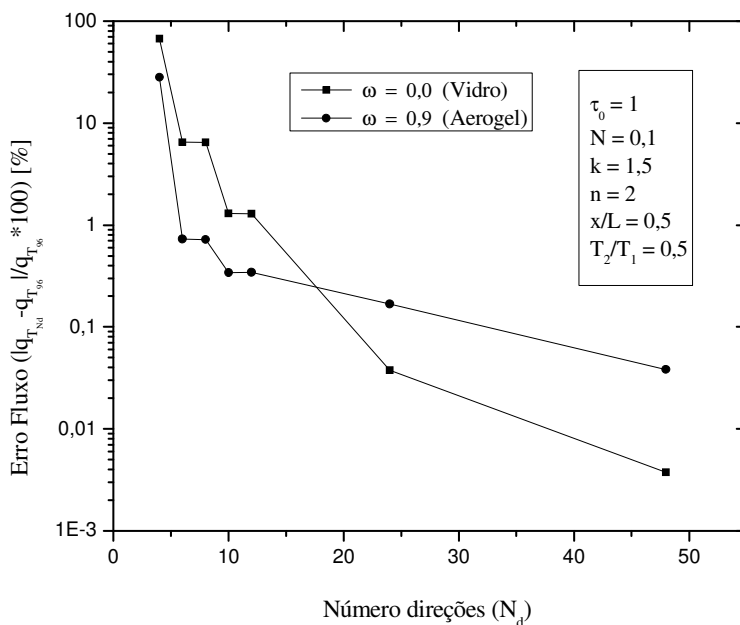


Figura 11. Erro percentual do fluxo total para condução e radiação acoplados em função do número de direções da quadratura ( $N_d$ ) na posição central do meio ( $x/L=0,5$ ) para  $\omega=0$  e  $\omega=0,9$ ,  $N=0,1$ ,  $n=2$ ,  $\tau_0=1$ , feixe de radiação incidente normal e relação de temperatura das faces  $T_2/T_1=0,5$ .

## 5. Conclusões

Neste trabalho apresentou-se um estudo da transferência de calor em meios semitransparentes com índice de refração diferente da unidade, comparando-se dois casos de materiais em especial: o vidro e o aerogel, sendo este último objeto de pesquisas que visam à substituição do vidro em diversas aplicações.

O modelo matemático adotado e o código computacional desenvolvido mostraram-se adequados para a representação do fenômeno de condução e radiação acopladas; o programa foi testado através da comparação dos resultados obtidos com a solução exata apresentada pela literatura e publicações específicas.

As simulações da condução e radiação acopladas entre placas negras demonstraram que o fator de acoplamento ( $N$ ) é determinante sobre o comportamento da distribuição de temperatura, alterando sensivelmente a forma das curvas principalmente próximo das faces. No caso da simulação com espalhamento verificou-se que o albedo ( $\omega$ ) não teve influência significativa sobre a forma das curvas, que apresentaram variação gradativa da curvatura nas posições mais internas da lâmina de material. Observou-se ainda que os perfis dos fluxos de calor por condução e radiação ao longo da espessura ficaram mais lineares no caso do material com espalhamento permanecendo o fluxo total com pouca alteração em relação ao material sem espalhamento. Também verificou-se que a utilização de um número de volumes de controle muito baixo ( $<50$ ) pode resultar em grandes erros no valor do fluxo total, especialmente próximo das faces, apesar de também diminuir significativamente o tempo de processamento do código computacional.

No caso das simulações com feixe incidente, verificou-se que o aerogel apresentou o fluxo total de calor inferior ao vidro permanecendo praticamente constante para ambos os materiais exceto próximo da face da esquerda. Os perfis de temperatura tenderam a ficar mais lineares no caso do aerogel em função da difusão. Verificou-se ainda uma variação sensível do fluxo total de calor com a variação do índice de refração para ambos os materiais. O número de direções da quadratura também pode resultar em grandes erros no fluxo total de calor, caso se utilize valores muito baixos ( $<10$ ).

## 6. Referências

- Brewster, M.Q., 1992, "Thermal radiative transfer and properties", Ed. John Wiley & Sons, Inc., 543p., New York.
- Glass, D. E., Özisik, M. N. e McRae, D. S., 1987, "Combined conduction and radiation with flux boundary condition for a semitransparent medium covered by thin radiating layers", J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. 38, N° 3, pp. 201-208.
- Heinemann, U., Caps, R. e Fricke, J., 1996, "Radiation-conduction interaction: an investigation on sílica aerogels", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 39, N° 10, pp. 2115-2130.
- McCluney, R., 1994, "Introduction to radiometry and photometry", Artech House, Boston, 402p..
- Modest, M. F., 1993, "Radiative heat transfer", McGraw-Hill, Inc, 832p..

- Moura, L.M., 1998 "Identification des proprietes radiatives des materiaux semi-transparents diffusants en situation de non-symetrie azimutale du champ radiatif", Thèse de doctorat n° 98ISAL0059, INSA de Lyon, Lyon. 217p..
- Moura, L.M., 2002, "Determinação das propriedades radiativas de materiais com índice de refração diferente da unidade", Monografia apresentada para obtenção do título de professor titular da PUCPR, Curitiba, PR.
- Moura, L.M., Baillis, D. e Sacadura, J.F., 1998, "Análise do método de ordenadas discretas: discretização espacial", In: Encontro Nacional de Ciências Térmicas (ENCIT98).
- Moura, L.M., Baillis, D. e Sacadura, J.F., 1997, "Analysis of the discrete ordinate method: angular discretization", 14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, COB1425, Bauru, Brazil, December 8-12<sup>th</sup>.
- Nicolau, V.P., Raynaud e M., Sacadura, J.F., 1994, Spectral radiative properties identification of fiber insulating materials, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 37, pp. 311-324.
- Nicolau, V.P., 1994, "Radiação e condução combinadas em um meio semitransparente com absorção e difusão isotrópica", Florianópolis, SC.
- Nicolau, V.P. e Maluf, F.P., 2001, "Determination of radiative properties of commercial glass", 18<sup>th</sup> International Conference on Passive and Low Energy Architecture, Florianópolis, SC, 7-9 Novembro.
- Siegel, R. e Spuckler, C. M., 1992, "Effect of index of refraction on radiation characteristics in a heated absorbing, emitting, and scattering layer", Journal of Heat Transfer, vol. 114, August.
- Siegel, R. e Spuckler, C. M., 1994a, "Approximate solution methods for spectral radiative transfer in high refractive index layers", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 37, pp. 403-413.
- Siegel, R. e Spuckler, C. M., 1994b "Effects of refractive index and diffuse or specular boundaries on a radiating isothermal layer", Journal of Heat Transfer, vol. 116, August.
- Siegel, R. e Spuckler, C. M., 1993, "Variable refractive index effects on radiation in semitransparent scattering multilayered regions", Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 7, No 4, Oct.-Dec.
- Xia, X. L., Huang, Y. e Tan, H. P., 2001, "Temperature field inside a gradient index absorbing-emitting with specular surfaces", School of Energy Science and Eng., Harbin Institute of Tech., Harbin, China.

#### **A NUMERICAL FORMULATION FOR COUPLED CONDUCTIVE RADIATIVE HEAT TRANSFER FOR A SEMITRANSSPARENT MEDIUM WITH NO-UNITARY REFRACTIVE INDEX**

Agnaldo Luís Guolo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUCPR – Rua Imaculada Conceição, 1155 – Prado Velho, Curitiba –PR - Brasil  
agnaldo.luiz@csn.com.br

Luís Mauro Moura

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUCPR – Rua Imaculada Conceição, 1155 – Prado Velho, Curitiba –PR - Brasil  
Luis.moura@pucpr.br

#### **Abstract**

*This work presents a formulation to study the heat transfer through semitransparent absorbing, emitting and scattering media (glass and aerogel). It was considered the process of conduction and radiation combined in a one-dimensional geometry (slab) with a collimated irradiation incident perpendicular on one of the surfaces, in steady state. The equation of Radiation Transfer is solved numerically by the method of Discrete Ordinates and the spatial discretization was done by the Control Volume Method. The conduction equation is solved by the Thomas algorithm (TDMA). The computational routine developed allows the analysis of the influence of each process (conduction/radiation) on the total heat transfer through the media. It is also presented an analysis of the errors originated from varying the refractive index and the number of directions of the quadrature used.*

**Keywords:** Conduction and radiation heat transfer, aerogel, glass, energy efficacy.